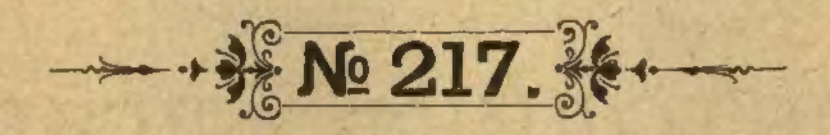
XIX Сем. 20-го августа 1895 г. № 1.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



Отъ редакціи.

Настоящимъ № 217 начинается XIX-ый семестръ изданія „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики" (т. е. *десятый* годъ существованія журнала). Условія подписки на текущее учебное полугодіе (XIX сем.) или на весь учебный годъ (XIX и XX сем.) остаются прежнія: 3 рубля за полугодіе и 6 руб. за годъ, а для льготныхъ подписчиковъ—2 рубля за полугодіе и 4 руб. за годъ.

На запросы, сдѣланные намъ многими изъ числа читателей и сотрудниковъ въ теченіе истекшаго полугодія, касательно того, будетъ ли журналъ нашъ издаваться и въ слѣдующемъ 1896 году, редакція заявляетъ нынѣ, что не считаетъ себя вправѣ прекращать пока изданіе, какъ потому, что въ мартѣ мѣсяцѣ текущаго года Его Сіятельству Г. Министру Народнаго Просвѣщенія угодно было назначить, по примѣру прежнихъ лѣтъ, субсидію для поддержки этого изданія, такъ и по причинѣ (ранѣе указанной въ предыдущемъ нашемъ заявленіи) отсутствія въ русской учебной литературѣ другого такого періодическаго органа печати, который могъ бы замѣстить нашъ „Вѣстникъ" безъ всякаго перерыва.

Хотя, во всякомъ случаѣ, журналъ нашъ будетъ издаваться какъ въ текущемъ полугодіи, такъ и въ теченіе всего будущаго 1896 года, однакожъ, во избѣжаніе возможности такого перерыва, нежелательнаго во всѣхъ отношеніяхъ, просимъ всѣхъ тѣхъ, кто желалъ бы или создать взамѣнъ „Вѣстника Оп. Физики" другой журналъ той же спеціальности, или взять на себя дальнѣйшее веденіе того-же „Вѣстника", или наконецъ примкнуть къ его соиздательству на тѣхъ либо другихъ условіяхъ, войти съ нами заблаговременно въ соглашеніе.

Съ такой же просьбой обращаемся и къ тѣмъ лицамъ, кои пожелали бы стать компаніонами-сотрудниками въ дѣлѣ изданія, подъ фирмою редакціи „Вѣстника Оп. Физики“, новыхъ физико-математическихъ книгъ, въ виду того, что дѣятельность этого рода, начатую въ Кіевѣ не безъ успѣха, редакція журнала вынуждена была прекратить въ Одессѣ, какъ за неимѣніемъ средствъ, такъ еще и по недостатку времени у редактора-издателя, состоящаго нынѣ учителемъ Одесскаго реальнаго училища.

Адресъ: для корреспонденціи: *Одесса, редакція Вѣстника Оп. Физики*; городской—*Лютеранскій пер. № 6.*

Редакторъ-Издатель *Эр. Шпачинскій.*

КЪ МЕТОДИКѢ АЛГЕБРЫ.

Настоящей замѣткой мнѣ хотѣлось бы обратить вниманіе преподавателей на нѣкоторые важные моменты въ курсѣ начальной алгебры, которыми удобно воспользоваться для уясненія учащимся истинной роли алгебры и преимуществъ ея пріемовъ передъ извѣстными имъ уже пріемами ариѳметики, а также для первоначальнаго ознакомленія ихъ съ сущностью математическаго анализа.—Такими моментами я считаю тѣ уроки, кои посвящаются алгебраическимъ *дѣйствіямъ*, истинный смыслъ которыхъ разъясняется обыкновенно далеко не такъ подробно, какъ ихъ механизмъ.

Начнемъ со сложенія и вычитанія. Въ курсѣ ариѳметики говорится только объ этихъ двухъ *основныхъ* дѣйствіяхъ и вовсе умалчивается о томъ, что кромѣ нихъ *есть еще три дѣйствія*, которыя могутъ быть сведены къ сложенію или къ вычитанію, но могутъ быть также выполнены и непосредственно. Въ алгебрѣ желательно указать на эти дѣйствія ради вышеуказанной цѣли. Мнѣ кажется, что это удобно сдѣлать слѣдующимъ образомъ.

Простѣйшія задачи на сложеніе могутъ быть только двухъ типовъ: 1) по даннымъ слагаемымъ найти ихъ сумму и 2) по даннымъ вычитаемому и разности найти уменьшаемое. Любая изъ задачъ перваго типа приводитъ, при алгебраическомъ обозначеніи, къ выраженію вида

$$a+b=x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (I)$$

(гдѣ a и b могутъ быть, въ свою очередь, суммами нѣсколькихъ слагаемыхъ); задачи второго типа даютъ

$$x-b=a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (II)$$

Первое изъ этихъ выраженій представляетъ алгебраическую *формулу*, второе—*уравненіе*. Первое не подлежитъ никакому алгебр. рѣшенію и есть ни что иное, какъ алгебраическое обозначеніе *дѣйствія сложенія*, подлежащаго непосредственному выполненію на практикѣ и неподдающагося никакой повѣркѣ. Слѣдовательно задачи типа (I) алгеброй *не рѣшаются* (а развѣ лишь упрощаются путемъ преобразованій

и сокращеній), *а выполняются*, какъ заданное дѣйствіе, въ ариѳметикѣ, въ геометріи, механикѣ и пр. Наоборотъ, задачи типа (II) на практикѣ, обыкновенно не выполняются, а рѣшаются алгеброй, какъ уравненія. Это рѣшеніе, основанное, какъ извѣстно, на общей аксіомѣ: „если къ равнымъ прибавимъ поровну, то суммы получатся равныя", заключается въ такомъ *преобразованіи*, которое приводитъ къ формулѣ (I). Такимъ образомъ алгебра доказываетъ, что всякая задача на нахожденіе уменьшаемаго по даннымъ вычитаемому и разности *можетъ быть* сведена, если угодно, къ задачѣ болѣе простой—нахожденію суммы двухъ слагаемыхъ. Но изъ этого еще не слѣдуетъ, что такое преобразованіе задачи (II) въ задачу (I) всегда обязательно. Напротивъ — нахожденіе уменьшаемаго по даннымъ вычитаемому и разности можетъ быть разсматриваемо какъ *самостоятельное* дѣйствіе, которое, если угодно, могло бы быть выполнено непосредственно. Да оно иногда и выполняется на практикѣ. Такъ напр. если кто помнитъ Пиѳагорову теорему и ему предложатъ задачу: какая площадь, уменьшенная квадратомъ a^2, даетъ въ остаткѣ площадь равновеликую съ площадью другого даннаго квадрата b^2? то ему незачѣмъ находить на самомъ дѣлѣ сумму двухъ данныхъ площадей, ибо онъ непосредственно скажетъ, что искомая площадь есть квадратъ, построенный на гипотенузѣ прям. треугольника, катеты котораго суть a и b. Даже если нѣтъ знанія такой общей зависимости, которая помогла бы намъ задачу типа (II) рѣшить непосредственно, всегда это дѣйствіе можетъ быть нами выполнено и помимо сведенія къ сложенію, хотя подчасъ это и бываетъ затруднительно. Напр. если бы требовалось найти такую прямую, которая за отсѣченіемъ отъ нея одного вершка дала бы въ остаткѣ одинъ дюймъ, то можно было бы взять, на глазъ, нѣкоторый отрѣзокъ, отложить на немъ вершокъ и затѣмъ пробовать равенъ ли остатокъ одному дюйму или нѣтъ; если да, то искомое уменьшаемое найдено, если нѣтъ, то надо пробовать взять иной отрѣзокъ, болѣе подходящій, который опять подвергнемъ прежней повѣркѣ, и т. д. до тѣхъ поръ пока наконецъ нашъ отрѣзокъ, соотвѣтственно измѣняемый послѣ каждой повѣрки, не окажется вполнѣ подходящимъ. — Такое дѣйствіе *подыскиванія уменьшаемаго*, хотя и подлежащее непосредственному выполненію, однакожъ въ общемъ случаѣ, какъ мы только что видѣли, неудобно и затруднительно. Съ другой стороны алгебра учитъ насъ, что такое дѣйствіе сводится попросту къ нахожденію суммы данныхъ вычитаемаго и разности, слѣдовательно незачѣмъ этому дѣйствію и придавать характера самостоятельнаго дѣйствія, ибо въ практикѣ рѣшенія задачъ оно, за весьма немногими исключеніями, не имѣетъ преимуществъ передъ сложеніемъ и всегда можетъ быть замѣнено этимъ послѣднимъ.—Но для того, чтобы такая замѣна была доступна и ученику, не знающему еще алгебры, ариѳметика должна пользоваться спеціальной теоремой: „уменьшаемое равно вычитаемому сложенному съ разностью"; этой теоремы достаточно, чтобы вышеуказанное преобразованіе задачи (II) въ задачу (I) ученики могли выполнить въ умѣ при рѣшеніи задачъ типа (II), но она нужна *только* для этой цѣли, и въ дальнѣйшемъ курсѣ алгебры становится излишнею, ибо—какъ было сказано—алгебраическое преобразованіе (II) въ (I) выполняется на основаніи общей аксіомы, а не упомянутой теоремы.—Такое упрощеніе разсужденій, на которыхъ осно-

ваются алгебраическія преобразованія (уменьшеніе числа общихъ посылокъ въ умозаключеніяхъ) должно быть отмѣчено какъ важное преимущество алгебры передъ ариѳметикой.

Задачи на вычитаніе бываютъ трехъ типовъ: 1) нахожденіе разности двухъ данныхъ величинъ, 2) отысканіе недостающаго слагаемаго и 3) отысканіе вычитаемаго по даннымъ уменьшаемому и разности. Алгебраически обозначенныя, задачи эти приводятъ къ выраженіямъ:

1-го типа (основного) . . $a-b=x$ . . . . (III)

2-го „ . . $b+x=a$
или . . $x+b=a$ . . . . (IV)

и 3-го „ . . $a-x=b$ . . . . (V)

Выраженіе (III) представляетъ алгебраическую *формулу*, обозначающую дѣйствіе вычитанія, подлежащее непосредственному выполненію; задачи этого типа алгебраически *не рѣшаются*, *и выполняются* на практикѣ, какъ заданное дѣйствіе (неподдающееся—какъ будетъ разъяснено ниже—повѣркѣ). Выраженія (IV) (равнозначныя вслѣдствіе независимости суммы отъ порядка расположенія слагаемыхъ) и (V) представляютъ *уравненія*, *рѣшаемыя* алгеброй и обыкновенно *не выполняемыя*, какъ самостоятельныя дѣйствія. Рѣшеніе этихъ уравненій состоитъ въ сведеніи ихъ, путемъ преобразованій, основанныхъ на общихъ только аксіомахъ, къ типу (III). Этимъ доказывается, что задачи: нахожденія дополнительнаго слагаемаго и нахожденія вычитаемаго по даннымъ уменьшаемому и разности, всегда могутъ быть сведены къ задачѣ нахожденія разности.

Эта послѣдняя задача, выполняется какъ самостоятельное дѣйствіе вычитанія, которое не слѣдуетъ называть дѣйствіемъ „обратнымъ сложенію" („уменьшеніе" обратно „увеличенію" и — наоборотъ, но вычитаніе какъ „нахожденіе разности" не обратно „нахожденію суммы", такъ какъ оба эти дѣйствія самостоятельны). Сложеніе ариѳметическое основано на *прямомъ*, а вычитаніе — на *обратномъ* счетѣ (единицами). Такъ какъ съ дѣтства пріобрѣтается бóльшій навыкъ къ первому, чѣмъ къ послѣднему, и табличка сложенія вслѣдствіе этого помнится тверже таблички вычитанія, то намъ нерѣдко бываетъ легче вмѣсто выполненія дѣйствія (III) $a-b=x$ выполнить равносильное ему дѣйствіе (IV) $b+x=a$, т. е. мы находимъ непосредственно не разность двухъ данныхъ чиселъ, а недостающее слагаемое. При *такомъ* нахожденіи x мы дѣйствительно рѣшаемъ задачу (IV), обратную задачѣ сложенія (I), но это есть лишь результатъ недостатка навыка*) въ выполненіи вычитанія путемъ обратнаго счета, за что мы и бываемъ наказаны необ-

*) По свидѣтельству проф. L. Delbos, индусы поражаютъ европейцевъ быстротою, съ которой рѣшаютъ мысленно сложные ариѳм. задачи; онъ говоритъ напр., что не встрѣчалъ образованнаго индуса, который затруднялся бы въ умственномъ сложеніи и вычитаніи дробей. Причину развитія такого навыка онъ усматриваетъ въ заучиваніи наизусть въ индусскихъ школахъ многихъ табличекъ, (о которыхъ будетъ еще упомянуто ниже при разборѣ умноженія и дѣленія). См. статью: „Преподаваніе ариѳметики въ индусскихъ школахъ" въ журналѣ „Физ.-Мат. Науки" 1893 г. № 1, стр. 58.

ходимостью дѣлать всякій разъ повѣрку найденнаго нами слагаемаго x путемъ сложенія. Въ общемъ же случаѣ вычитаніе, какъ дѣйствіе, сводится къ отнятію одной данной величины отъ другой, однородной съ нею, и выполняется непосредственно такими же пріемами, какъ и сложеніе. Если напр. требуется при помощи циркуля найти разность двухъ данныхъ угловъ (или двухъ данныхъ отрѣзковъ прямой), то такое построеніе выполняется непосредственно тѣми же пріемами какъ и построеніе суммы двухъ данныхъ угловъ (или отрѣзковъ), и все различие заключается лишь въ измѣненіи направленія отложенія.—Въ виду того, что сложеніе и вычитаніе, какъ непосредственно выполняемыя дѣйствія, не отличаются по существу употребляемыхъ пріемовъ, а только по направленію отсчитыванія (отмѣриванія, отрѣзыванія и пр.), алгебра и обобщаетъ эти два дѣйствія введеніемъ понятія о величинахъ отрицательныхъ и условія обозначать тѣмъ же знакомъ *минусъ*, которымъ выражается дѣйствіе вычитанія, измѣненіе на обратное того направленія, по коему данная величина откладывается, (отсчитывается и пр.). При такихъ условіяхъ, обѣ основныя формулы сложенія (I) и вычитанія (III) могутъ быть замѣнены одною

$$a+(\pm b)=x; \text{ т. е. } a\pm b=x$$

или

$$a-(\pm b)=x \text{ т. е. } a\mp b=x$$

гдѣ символомъ $\pm b$ обозначена вообще величина, подлежащая отсчитыванію (отмѣриванію, отложенію и пр.) въ томъ либо другомъ направленіи, а самой буквою b—ея абсолютное значеніе независимо отъ направленія.—Вслѣдствіе такого обобщенія, сложеніе въ алгебрѣ не всегда есть увеличеніе, а вычитаніе—не всегда есть уменьшеніе, ибо сложеніе съ величиной отрицательной равносильно уменьшенію, а отнятіе величины отриц. равносильно увеличенію.

Остальные два типа задачъ на вычитаніе приводятъ, какъ было сказано, къ алгебраическимъ уравненіямъ:

$$b+x=a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (IV)$$

и

$$a-x=b, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (V)$$

коихъ рѣшеніе приводитъ къ основной формѣ $x=a-b$. Однакожъ каждая изъ сихъ задачъ могла бы быть выполнена и непосредственно, помимо алгебры, а именно: (IV) — дѣйствіемъ *подысканія недостающаго слагаемаго* и (V)—дѣйствіемъ *подысканія вычитаемаго* по даннымъ уменьшаемому и разности. Первое изъ этихъ дѣйствій, какъ уже было замѣчено, мы нерѣдко выполняемъ умственно вмѣсто дѣйствія вычитанія. Такъ напр., чтобы опредѣлить сдачу съ рубля при уплатѣ 95 копѣекъ, мы обыкновенно не отсчитываемъ 95 единицъ изъ 100 единицъ обратнымъ счетомъ, или мысленнымъ вычитаніемъ 95 изъ 100, а опредѣляемъ 5 коп. какъ то, что недостаетъ до рубля при 95 коп., т. е. рѣшаемъ непосредственно уравненіе $95+x=100$, не приводя его къ основной формулѣ $x=100-95$. При нахожденіи разности между двумя данными квадратами, мы не будемъ на самомъ дѣлѣ откладывать меньшій квадратъ на большемъ, а воспользуемся прямо теоремой Пиѳагора и найдемъ сторону искомаго квадрата построеніемъ прям. треугольника

по даннымъ гипотенузѣ и катету, т. е. вмѣсто предложеннаго намъ уравненія $a^2 - b^2 = x^2$, мы предпочтемъ рѣшить непосредственно уравненіе $b^2 + x^2 = a^2$. И т. д. Но въ общемъ случаѣ дѣйствіе подысканія недостающаго слагаемаго неудобно и затруднительно, потому что если намъ неизвѣстна общая зависимость, связывающая величины данныя съ искомою въ уравненіи $b + x = a$, намъ приходится подбирать значенія для x наугадъ и потомъ всякій разъ дѣлать повѣрку нашего предположенія, и такое подыскиваніе въ иныхъ случаяхъ потребовало бы много времени и работы. Вотъ почему въ ариѳметикѣ это дѣйствіе игнорируется (хотя, быть можетъ, при повторительномъ курсѣ въ высшемъ классѣ было бы не лишнимъ выяснить ученикамъ это дѣйствіе, къ которому на практикѣ они часто прибѣгаютъ безсознательно), или, лучше сказать, смѣшивается съ дѣйствіемъ вычитанія, къ которому оно всегда можетъ быть сведено, на основаніи специальной теоремы: „всякое слагаемое равно суммѣ безъ остальныхъ слагаемыхъ“, теоремы, которая въ курсѣ алгебры становится уже лишней, ибо тамъ преобразованіе выраженія (IV) въ (III) основано только на общей аксіомѣ („если отъ равныхъ отнять поровну, то получатся равные остатки“).

Выраженіе (V) $a - x = b$ представляетъ тоже особое дѣйствіе *подыскиванія вычитаемаго*, которое точно такъ же могло бы быть выполнено самостоятельно, безъ сведенія задачи къ вычитанію b изъ a, и которое на практикѣ иногда такъ и выполняется. Такимъ путемъ напр. рѣшается, на основаніи Пиѳагоровой теоремы, задача: какую площадь надо отнять отъ даннаго квадрата, чтобы осталась площадь, равная другому данному квадрату, или, напр. такая: въ одной коробочкѣ 25 спичекъ, въ другой 20; сколько спичекъ надо вынуть изъ первой коробочки, чтобы въ обѣихъ осталось поровну? Но въ общемъ случаѣ, когда задача не такъ проста и когда общая зависимость между данными и неизвѣстною величинами въ уравненіи $a - x = b$ намъ не извѣстна, подыскиваніе вычитаемаго, выполняемое какъ самостоятельное дѣйствіе, было бы затруднительно и неудобно, такъ какъ пришлось бы дѣлать относительно величины искомаго вычитаемаго цѣлый рядъ послѣдовательныхъ предположеній и каждое изъ нихъ провѣрять непосредственно. Поэтому въ ариѳметикѣ и это дѣйствіе устранено и замѣнено попросту вычитаніемъ, къ которому оно всегда можетъ быть сведено на основаніи специально нужной для этой цѣли теоремы: „вычитаемое равно уменьшаемому безъ разности“. Въ алгебрѣ теорема эта уже болѣе не нужна, такъ какъ преобразованіе дѣйствія (V) въ (III) основано здѣсь на двухъ вышеуказанныхъ общихъ аксіомахъ.

Итакъ, изъ разсмотрѣнныхъ нами пяти элементарныхъ дѣйствій, изображенныхъ выраженіями (I), (II), (III), (IV) и (V), только два: (I)—сложеніе и (III)—вычитаніе приняты какъ основныя дѣйствія, подлежащія непосредственному выполненію; остальныя три, а именно: (II)—нахожденіе уменьшаемаго, (IV)—нахожденіе недостающаго слагаемаго и (V)—нахожденіе вычитаемаго, хотя иногда и выполняются нами въ умѣ непосредственно, въ большинствѣ случаевъ сводятся однакожъ къ первымъ двумъ: (II)—къ (I), а (IV) и (V)—къ (III). Вслѣдствіе этого ариѳметика не можетъ обойтись безъ трехъ вышеприведенныхъ специальныхъ теоремъ, необходимыхъ для приведенія задачъ типовъ (II),

(IV) и (V) къ задачамъ основныхъ типовъ (I) и (III), а алгебра разсматриваетъ всѣ три выраженія, обозначающія эти дѣйствія, какъ *уравненія.* Замѣтимъ кстати, что это суть *первыя* уравненія, съ которыми учащіеся встрѣчаются въ начальномъ курсѣ алгебры, и что при ихъ составленіи и рѣшеніи приходится *въ первый разъ* пользоваться могучимъ орудіемъ математическаго анализа, а именно: мы предполагаемъ, что предложенная намъ задача уже рѣшена, что искомая величина (уменьшаемое, или слагаемое, или вычитаемое) есть нѣкоторое x, выраженное въ тѣхъ же единицахъ, какъ и данныя величины a и b, и, въ этомъ предположеніи, выражаемъ при помощи алгебраическихъ знаковъ ту зависимость между данными величинами и искомою, которая требуется задачей. Затѣмъ мы задаемся вопросомъ—какъ *преобразовать* наше уравненіе, чтобы искомое x получилось въ формѣ одного изъ принятыхъ нами за основныя выраженій (I) или (III), и чтобы такое преобразованіе (называемое въ данномъ случаѣ *рѣшеніемъ уравненія*) было по возможности просто. Въ рѣшеніи этого вопроса о правильномъ и простѣйшемъ преобразованіи и заключается *вся трудность математическаго анализа.* Если мы сумѣемъ ее побѣдить, если *подыщемъ* въ запасѣ нашего знанія тѣ общія истины (аксіомы или теоремы), на основаніи которыхъ требуемое преобразованіе можетъ быть выполнено,—тогда уравненіе рѣшено и роль алгебры окончена, такъ какъ искомая величина выражена уже той либо другой формулою, которая (предполагая, что всѣ возможныя упрощенія въ ней уже сдѣланы) подлежитъ только непосредственному выполненію, какъ заданное дѣйствіе. Какая же *цѣль* такого примѣненія анализа къ нашимъ тремъ типамъ задачъ? Въ данномъ случаѣ цѣль заключалась въ сведеніи такого предложеннаго намъ задачею дѣйствія, непосредственное выполненіе котораго было бы для насъ, вообще говоря, затруднительно, къ одному изъ тѣхъ основныхъ математическихъ дѣйствій, которое выполняется нами легко, благодаря навыку. Въ такомъ сведеніи вообще заключается практическая цѣль анализа, ибо—какъ увидимъ ниже—*всякое* составленное по предложенной задачѣ *алгебраическое уравненіе можно разсматривать какъ выраженіе особаго дѣйствія,* которое могло бы быть выполнено непосредственно путемъ подысканія для неизвѣстной величины того значенія, которое удовлетворитъ повѣркѣ; а такъ какъ типовъ уравненій можетъ быть безконечно много, то столько же пришлось бы имѣть въ математикѣ и особыхъ дѣйствій, если бы анализъ не давалъ намъ въ руки средства очень многія изъ такихъ уравненій рѣшать путемъ преобразованія и большинство этихъ безчисленныхъ спеціальныхъ дѣйствій сводить такимъ образомъ къ нѣсколькимъ основнымъ алгебраическимъ дѣйствіямъ.—(NB. Мы говоримъ „большинство", а не „всѣ", ибо, какъ извѣстно, могутъ быть и такія уравненія, коихъ мы алгебраически рѣшать не умѣемъ; это значитъ, что въ числѣ этихъ спеціальныхъ дѣйствій есть и такія, которыхъ мы не умѣемъ сводить къ простѣйшимъ основнымъ. Если непосредственное выполненіе такихъ дѣйствій очень затруднительно, мы довольствуемся обыкновенно только выполненіемъ ихъ *по приближенію,* т. е. находимъ не точное значеніе искомой величины, а болѣе или менѣе приближенное).

Какія изъ дѣйствій выбрать за основныя—съ алгебраической точки зрѣнія безразлично. Такъ напр. изъ числа разсмотрѣнныхъ здѣсь

нами пяти элементарныхъ дѣйствій можно было бы принять за основныя такія два: сложеніе (I) и нахожденіе недостающаго слагаемаго (IV) (что мы нерѣдко и дѣлаемъ при умственномъ рѣшеніи задачъ). Тогда выраженія (I) и (IV)

$$a + b = x; \ b + x = a \quad . \ . \ . \ . \ . \ (\alpha)$$

играли бы въ алгебрѣ роль *формулъ*, не подлежащихъ ни рѣшенію ни дальнѣйшему упрощенію, а выраженія (II), (III) и (V)

$$x - b = a; \ a - b = x; \ a - x = b$$

разсматривались бы какъ уравненія, рѣшеніе коихъ состояло бы въ сведеніи къ одному изъ типовъ (α).

Важно замѣтить еще, что *дѣйствіе, принятое за основное, не поддается повѣркѣ*, если подъ этимъ терминомъ будемъ понимать пріемъ обнаруженія *коренныхъ*, а не однѣхъ *случайныхъ* лишь ошибокъ. Если ученикъ ошибочно заучилъ табличку сложенія и говоритъ напр., что 7 да 5 даютъ 13, то коренной ошибки, сдѣланной имъ при сложеніи даннаго ряда чиселъ, гдѣ ему приходилось складывать семерки съ пятерками, или при вычитаніи, гдѣ ему приходится вычитывать 5 или 7 изъ 13, тотъ же ученикъ не обнаружитъ никакой повѣркой, ибо ту же ошибку онъ будетъ повторять и въ повѣркѣ. Имѣя въ рукахъ испорченный циркуль, который не держитъ раствора, мы рискуемъ сдѣлать коренную ошибку какъ напр. при построеніи суммы такъ и разности двухъ данныхъ отрѣзковъ; повѣрка обоихъ этихъ дѣйствій при помощи того же циркуля не можетъ привесть къ обнаруженію такой ошибки. Такъ называемыя „ошибки наблюденій“ потому и не могутъ быть обнаружены никакою „повѣркою“ (понимаемой въ ариѳметическомъ смыслѣ), что въ нихъ входятъ помимо случайныхъ ошибокъ еще и ошибки коренныя, зависящія отъ несовершенствъ нашихъ органовъ и употребляемыхъ инструментовъ, а таковыя ошибки, сдѣланныя при непосредственномъ выполненіи какого бы то ни было дѣйствія (измѣренія, взвѣшиванія, счета времени и пр.), не подлежащаго сведенію къ другому дѣйствію, болѣе намъ привычному, т. е. принятаго за основное, — не могутъ быть, какъ сказано, обнаружены при повѣркѣ съ тѣми же инструментами и тѣми же наблюдателями. — Такъ называемыя ариѳметическія повѣрки дѣйствій касаются только случайныхъ ошибокъ; когда говорится напримѣръ, что правильность найденной ученикомъ разности можно повѣрить сложивъ ее съ вычитаемымъ и сравнивъ, равна ли полученная сумма уменьшаемому или нѣтъ, то при этомъ предполагается во 1-хъ, что дѣлавшій вычитаніе ученикъ знаетъ настолько твердо табличку сложенія, что коренной, постоянно одной и той же ошибки уже не дѣлаетъ, и во 2-хъ, что, по причинѣ большаго навыка къ сложенію нежели къ вычитанію, у него меньше шансовъ сдѣлать ошибку при повѣркѣ вычитанія, чѣмъ при самомъ вычитаніи.— Мнѣ кажется, что ученикамъ старшихъ классовъ при повтореніи курса ариѳметики непремѣнно слѣдуетъ выяснить, что должно понимать подъ повѣркою и что истинной повѣркѣ подлежатъ только такія дѣйствія, которыя могутъ быть сведены къ простѣйшимъ, основнымъ, какъ напр. разсмотрѣнныя нами дѣйствія

(II), (IV) и (V). Въ алгебрѣ повѣрка такихъ дѣйствій сводится къ повѣркѣ тѣхъ преобразованій, при помощи которыхъ они были сведены къ основнымъ, т. е. къ повѣркѣ рѣшенія уравненія, которая, какъ извѣстно, дѣлается путемъ подстановки вмѣсто *x* найденнаго для него значенія и должна привесть къ *тождеству* (т. е. къ алгебраически выраженной аксіомѣ: „всякая величина сама себѣ равна").

III.

(Продолженіе слѣдуетъ).

СОХРАНЕНІЕ и ПРЕВРАТИМОСТЬ ЭНЕРГІИ.

Новые учебные планы вводятъ ученіе о работѣ силъ и о превращеніяхъ энергіи въ гимназическій курсъ физики. Систематическое изложеніе ученія о сохраненіи энергіи отнесено къ курсу 8-го класса; въ томъ же классѣ полагается повтореніе курса физики. Мы думаемъ, что эти двѣ задачи должны быть соединены. Развитіе ученія о сохраненіи энергіи въ примѣненіи ко всѣмъ областямъ явленій представляетъ самое цѣлесообразное средство повторить самыя явленія, объединяя и освѣщая ихъ однимъ общимъ началомъ.

Предлагаемая вниманію читателей статья содержитъ опытъ изложенія такого курса. Въ выборѣ разсматриваемыхъ явленій мы старались не выходить изъ рамокъ обычнаго курса, чтобы не связывать изложенія ученія о превращеніяхъ энергіи съ расширеніемъ круга изучаемыхъ явленій. Однако нѣкоторые вопросы этого рода все же выдвигаются сами собой. Укажемъ, напримѣръ, на ученіе объ ударѣ тѣлъ, какъ способѣ передачи движенія.

Объяснительная записка къ учебнымъ планамъ рекомендуетъ и въ предшествующемъ курсѣ обращать вниманіе по возможности на всѣ случаи превращеній энергіи. Но подобныя указанія могутъ быть сколько нибудь плодотворны только при условіи, что въ 6 классѣ будетъ проходиться объ измѣреніи работы и выясняться понятіе хотя бы о вѣсовой энергіи, какъ о величинѣ, и о передачѣ ея на рычагѣ отъ одного тѣла другому. Такимъ образомъ нѣкоторыя основныя понятія изъ этого курса будутъ усвоиваться въ 6 и 7 классахъ. При этомъ условіи на прохожденіе систематическаго курса въ 8 классѣ потребуется не болѣе 25 уроковъ, которые безъ сомнѣнія могутъ быть выдѣлены, если принять во вниманіе, что тогда въ особомъ повтореніи физики не будетъ надобности.

А. О работѣ силъ.

I. Измѣреніе работы.

§ 1. Если на тѣло дѣйствуетъ сила и тѣло движется, то эта сила производитъ работу. Такъ, если я рукой подымаю стаканъ, сила моей

руки производитъ работу; когда камень падаетъ, сила его вѣса производитъ работу; когда лошадь везетъ возъ, сила ея мускуловъ производитъ работу; когда вѣтеръ движетъ крылья мельницы, сила инерціи его движенія производитъ работу. Для наличности работы необходимо, чтобы на тѣло дѣйствовала сила и чтобы тѣло двигалось; если нѣтъ одного изъ этихъ признаковъ, нѣтъ и работы. Такъ, когда стаканъ стоитъ на столѣ, то хотя на него и дѣйствуетъ сила тяжести, она не производитъ работы, потому что стаканъ не движется; точно такъ же я не произвожу работы, когда держу неподвижно въ рукахъ гирю въ 1 пудъ, хотя и чувствую отъ этого утомленіе; но здѣсь нѣтъ движенія тѣла, подверженнаго дѣйствію силы, слѣдовательно нѣтъ и работы. Равномѣрное движеніе тѣла по закону инерціи не представляетъ работы, потому что здѣсь хотя и есть движеніе, но нѣтъ дѣйствія силы.

§ 2. Работа можетъ быть больше, или меньше, смотря по величинѣ силы и по длинѣ пути, проходимаго тѣломъ. Отсюда понятіе о работѣ, какъ объ извѣстной величинѣ. Принимаютъ, что величина работы пропорціональна силѣ, если длина пути остается та же, и пропорціональна длинѣ пути, если сила не измѣняется. Слѣдовательно, если измѣняются и сила, и длина пути, то работа пропорціональна произведенію силы на длину пути. Напримѣръ, если силу увеличить вдвое, а длину пути втрое, работа увеличится въ 6 разъ.

Если умѣемъ найти отношеніе двухъ работъ, можно измѣрить всякую работу: нужно только какую нибудь опредѣленную работу принять за единицу мѣры. Удобнѣе всего выбрать такую, которая соотвѣтствовала бы единицѣ пути и единицѣ силы. Поэтому *за единицу работы принимаютъ работу силы въ 1 килограммъ на протяженіи 1 метра*. Эта работа называется *килограммометромъ*. Если сила въ 5 килограммовъ перемѣщаетъ тѣло на протяженіи 3 метровъ, то производитъ работу въ 15 килограммометровъ; если камень въ 4 килограмма падаетъ съ высоты 6 метровъ, то сила тяжести его производитъ работу въ 24 килограммометра; если я рукой подыму грузъ въ 3 килограмма на высоту двухъ метровъ, то произведу работу въ 6 килограммометровъ, потому что, чтобы подымать тѣло, вѣсящее 3 килограмма, нужно употреблять усиліе, равное тремъ килограммамъ.

Вообще

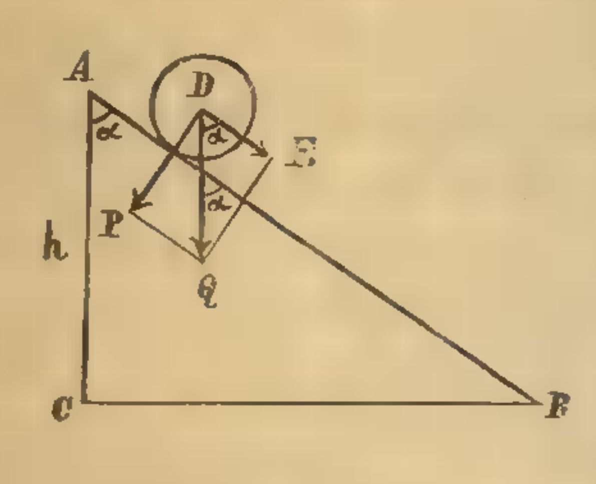
$$T = ps, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

если работа T измѣрена въ килограммометрахъ, сила p—въ килограммахъ, разстояніе s—въ метрахъ.

Килограммометры есть практическая единица работы. *Абсолютная единица работы*, *называемая эргомъ*, *есть работа силы въ 1 дину на протяженіи 1 сантиметра*. Подставляя въ равенство (1) вмѣсто p одну дину $= \frac{1}{980000}$ килограмма, вмѣсто s—1 сантиметръ $= \frac{1}{100}$ метра, получимъ, что 1 эргъ равенъ $\frac{1}{98.10^6}$ килограммометра, или приблизительно, принимая 98 за 100, 10^{-8} килограммометра. Такъ какъ отношеніе между эргомъ, диной и сантиметромъ то же, что между килограммоме-

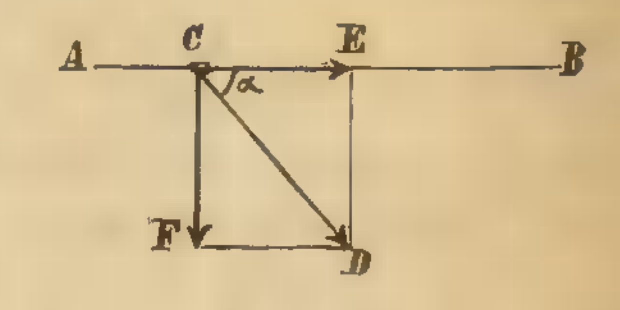
тромъ, килограммомъ и метромъ, то работа въ абсолютныхъ единицахъ выражается формулой (1).

§ 3. Положимъ, что тяжелый шаръ D (фиг. 1) катится по лотку AB, поставленному наклонно къ горизонту. Въ этомъ случаѣ сила Q, дѣйствующая на шарѣ, образуетъ съ направленіемъ пути уголъ α. Разлагая силу Q на двѣ составляющія, направленныя одна $\parallel$ AB, другая $\perp$ AB, получимъ движущую силу DF и потерянную DP. Сила DP работы не производитъ, такъ какъ въ эту сторону шаръ двигаться не можетъ и если бы не было другой силы DF, шаръ былъ бы въ покоѣ. Работа T, производимая силой DF, когда шаръ переходитъ отъ точки A къ B, равна AB.DF. Но $DF = Q\cos\alpha$; обозначая AB буквой s и подставляя въ формулу работы, получимъ: $F = sQ.\cos\alpha$.



Фиг. 1.

Точно такъ же если на несгибаемый стержень AB (фиг. 2), укрѣпленный на концахъ, надѣть кольцо C и, привязавъ къ нему шнурокъ, тянуть съ силой Q по направленію CD, образующему съ AB уголъ α (направленіе это предполагается постояннымъ во все время движенія), то часть силы Q уничтожается сопротивленіемъ стержня, а движущей силой будетъ только составляющая силы Q, направленная по AB. Согласно предыдущему найдемъ, что работа T, производимая при перемѣщеніи кольца изъ A въ B, равна CE.AB; но $CE = Q\cos\alpha$; слѣдовательно



Фиг. 2.

$$T = sQ\cos\alpha; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

изъ уравненія (2) слѣдуетъ:

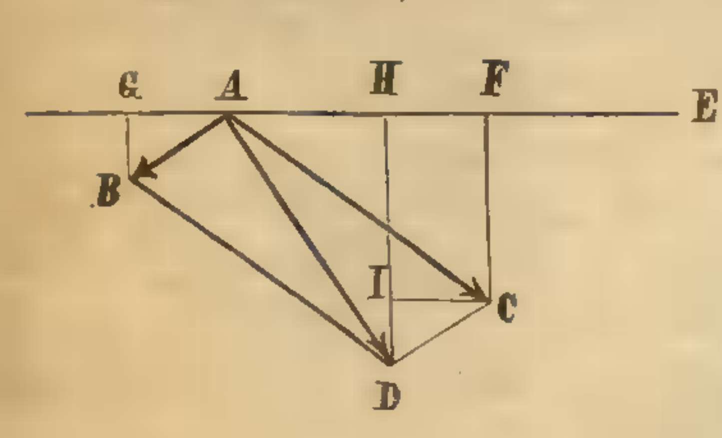
1. При той же длинѣ пути та же сила производитъ тѣмъ большую работу, чѣмъ меньше уголъ между направленіемъ силы и направленіемъ пути—тѣмъ больше сила содѣйствуетъ движенію тѣла и наоборотъ.

2. Уравненіе (2) содержитъ общее выраженіе работы, заключающее, какъ частные случаи, выраженіе работы силы, совпадающей съ направленіемъ движенія, и сдѣланное нами выше заключеніе, что сила CF, или DP, перпендикулярная къ направленію движенія, работы не производитъ. Въ самомъ дѣлѣ, если $\alpha = 0$, то $\cos\alpha = 1$ и $T = Qs$, если $\alpha = 90^0$, то $\cos\alpha = 0$ и $T = 0$.

3. Работа положительна, если уголъ α острый, и отрицательна, если тупой. Въ первомъ случаѣ сила Q содѣйствуетъ движенію тѣла и называется двигателемъ; во второмъ — противодѣйствуетъ движенію и называется сопротивленіемъ. Слѣд. работа двигателя положительна, работа сопротивленія отрицательна. Такъ, въ 1-мъ примѣрѣ, если бы шаръ двигался не отъ A къ B, а отъ B къ A, т. е. какая либо другая сила катила бы его вверхъ, то сила тяжести Q представляла бы сопротивленіе и произвела бы отрицательную работу.

4. Работа равнодѣйствующей равна суммѣ работъ составляющихъ. Докажемъ это для случая, когда силы дѣйствуютъ на одну точку и тѣло движется прямолинейно.

Положимъ, что на точку A (фиг. 3) какого либо тѣла дѣйствуютъ двѣ силы AB и AC. Равнодѣйствующая этихъ силъ будетъ AD. Если бы тѣло было свободно, оно двигалось бы по направленію AD. Если же оно не свободно, или на него дѣйствуютъ еще другія силы, то оно можетъ двигаться по какому либо другому направленію. Предположимъ этотъ болѣе общій случай. Положимъ, что точка A перемѣщается по направленію AE въ точку E. Работа силы AC, $T_{AC} = AE.AF$; работа силы AB, $T_{AB} = -AE.GA$. Сумма этихъ двухъ работъ равна $T_{AC} + T_{AB} = AE(AF - GA)$. Но изъ равенства треугольниковъ GBA и DIC ($IC \parallel AE$) слѣдуетъ, что $GA = CI$, но $CI = FH$, слѣд. $T_{AB} + T_{AC} = AE(AF - HF) = AE.AH$.



Фиг. 3.

Это послѣднее произведеніе представляетъ работу равнодѣйствующей AD. Слѣд. $T_{AB} + T_{AC} = T_{AD}$, ч. и т. д.

Соединяя по двѣ работы нѣсколькихъ силъ, докажемъ теорему для какого угодно числа силъ.

§ 4. Для того, чтобы вкатить шаръ D изъ точки B въ A, надо приложить силу, равную DF, и, слѣдовательно, произвести работу, равную $DF.s = Qs.\cos\alpha$, т. е. такую же, какую производитъ сила тяжести, когда шаръ скатывается изъ A въ B. Произведеніе $Qs.\cos\alpha$ можно представить, какъ $Q.s.\cos\alpha = Qh$, такъ какъ $s.\cos\alpha = AC = h$. Значитъ работа, которую нужно произвести, чтобы поднять тяжелое тѣло по наклонному пути, равна вѣсу его, умноженному на высоту, т. е. такая же, какъ если бы мы подымали тѣло по вертикальному направленію.

§ 5. Работа при подъемѣ тяжелаго тѣла по ломанному пути такъ же равна вѣсу тѣла, умноженному на высоту подъема. Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи предыдущаго § работа при перемѣщеніи

изъ A въ C (фиг. 4), $T_1 = Q.MC = Q.IH$

„ C „ D „ $T_2 = Q.KD = Q.HG$

„ D „ E „ $T_3 = Q.LE = Q.GF$

„ E „ B „ $T_4 = Q.FB$

Вся произведенная работа $T =$

$= T_1 + T_2 + T_3 + T_4 =$

$Q(IH + HG + GF + FB) = Q.IB.$

ч. и т. д.

Фиг. 4.

Понятно, что такую же работу произведетъ сила тяжести, когда шаръ скатится изъ B въ A.

§ 6. Работа при подъемѣ тяжелаго тѣла по криволинейному пути (или работа силы тяжести при паденiи тѣла по криволинейному пути) тоже равна вѣсу тѣла, помноженному на высоту. Всякiй криволинейный путь можно разсматривать, какъ предѣлъ вписанныхъ ломанныхъ путей, при безконечномъ увеличенiи числа прямолинейныхъ отрѣзковъ. Но величина работы остается при этомъ постоянной; слѣдовательно она останется та же и въ предѣлѣ.

Итакъ, величина работы при подъемѣ тяжелаго тѣла на извѣстную высоту, или величина работы силы тяжести при паденiи тѣла съ извѣстной высоты, не зависитъ отъ пути, по которому происходитъ перемѣщенiе, и всегда равна вѣсу тѣла, умноженному на высоту подъема или паденiя.

II. Работа машинъ.

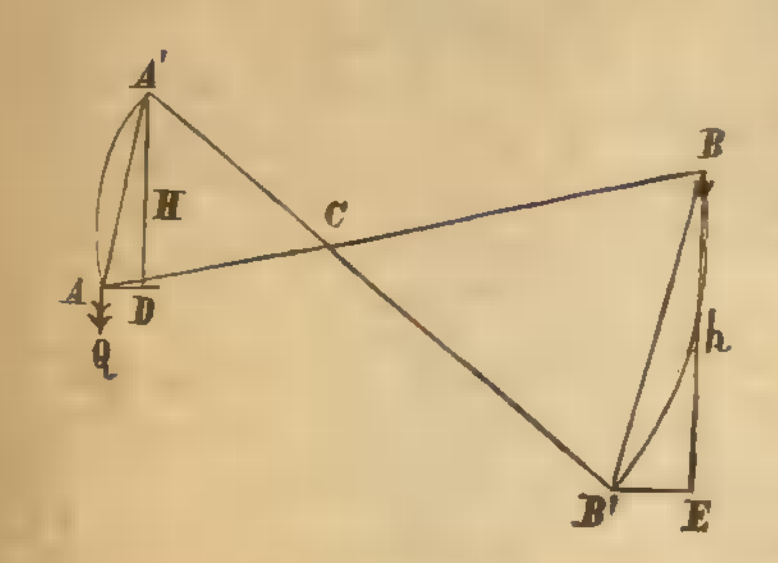
§ 7. Машины употребляются съ цѣлью уменьшить силу, необходимую для произведенiя работы, или уменьшить скорость, съ которой должна двигаться точка приложенiя силы. Но есть-ли такiя машины, при помощи которыхъ можно было бы уменьшить самую работу и достигнуть того же результата? Нужно, напримѣръ, поднять грузъ въ 100 килограммовъ на высоту 20 метровъ; можно-ли при помощи какой либо машины сдѣлать это, но такъ, чтобы сила, приложенная къ машинѣ, произвела работу не въ 2000 килограммометровъ, а меньшую? Этотъ вопросъ намъ предстоитъ теперь рѣшить.

Нужно еще оговориться, что мы разсматриваемъ идеальныя машины, свободныя отъ всѣхъ вредныхъ сопротивленiй. Поэтому если двѣ силы уравновѣшены на машинѣ, достаточно къ одной изъ нихъ прибавить самую малую, безконечно малую силу, чтобы она преодолѣла другую и чтобы началось движенiе въ сторону дѣйствiя бóльшей силы. Такъ какъ эта прибавочная сила можетъ быть какъ угодно мала, то принимаютъ, что ея совсѣмъ не нужно и что, слѣдовательно, если двѣ силы уравновѣшиваются на машинѣ, то каждой изъ нихъ достаточно, чтобы преодолѣть другую. Когда мы будемъ говорить о силѣ, которая нужна, чтобы преодолѣть данное сопротивленiе, мы всегда будемъ принимать ее равной той, какая можетъ уравновѣсить данное сопротивленiе, совершенно подобно тому, какъ мы приняли раньше, что для того, чтобы подымать рукой грузъ въ 5 килограммовъ, нужно усилiе руки въ 5 килограммовъ.

§ 8. *Наклонная плоскость.* Случай подъема груза по наклонной плоскости силой, параллельной длинѣ, былъ уже разсмотрѣнъ нами въ § 3. Тамъ мы нашли, что работа двигателя равна Qh, или вѣсу тѣла, умноженному на высоту, т. е. та же, какъ если бы работа производилась безъ помощи машины.

§ 9. *Рычагъ 1-го рода.* Положимъ, что грузъ Q подымается на высоту H посредствомъ рычага 1-го рода. Двигателемъ служитъ грузъ q, привѣшенный къ другому плечу рычага и уравновѣшивающiй первый. Если бы сила была приложена непосредственно къ грузу Q, нужно было бы произвести работу QH. Теперь работу производитъ грузъ q, который спускается на высоту h по дугѣ BB' (фиг. 5). По предыдущему работа

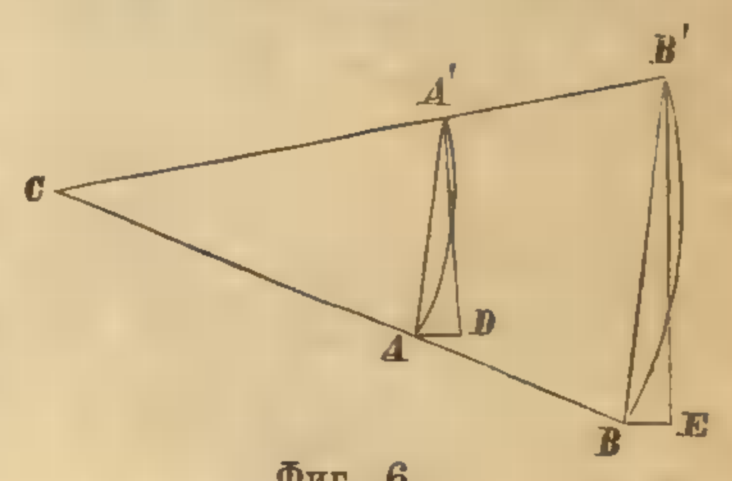
силы q равна qh. По закону рычага q:Q = AC:BC. Изъ подобія треугольниковъ A′CA и B′CB (AC:CB=A′C:CB′, ACA′ = BCB′) имѣемъ: AC:BC=AA′:BB′ и AA′‖BB′. Изъ подобія прямоугольныхъ треугольниковъ AA′D и BB′E (стороны ихъ параллельны) слѣдуетъ, что AA′:BB′= =A′D:BE. Отсюда q:Q=AC:BC=AA′:BB′= = A′D:BE, или q:Q = H:h и qh = QH. Слѣд. сила q, приложенная къ плечу CB, производитъ такую же работу, какъ если бы грузъ подымался безъ помощи машины.



Фиг. 5.

Когда грузъ Q подымается на высоту H, сила тяжести его производитъ отрицательную работу QH, которая по абсолютной величинѣ равна, по предыдущему, qh, т. е. положительной работѣ двигателя. Итакъ, въ случаѣ силъ, уравновѣшенныхъ на рычагѣ, положительная работа двигателя и отрицательная работа сопротивленія равны по абсолютной величинѣ, и алгебраическая сумма работъ всѣхъ силъ равна нулю.

§ 10. *Рычагъ 2-го рода.* На рычагѣ 2-го рода грузъ Q подымается на высоту H силой q, приложенной къ точкѣ B (фиг. 6) и направленной вертикально вверхъ. Здѣсь приходится повторить предшествующее разсужденіе. Разница только въ томъ, что двигателемъ служитъ не вѣсъ, а сила, направленная вертикально вверхъ. Понятно, что къ такой силѣ примѣнимы всѣ заключенія о работѣ тяжести (см. §§ 4—6) съ тою лишь разницей, что положительная работа производится ею при движеніи вверхъ, а отрицательная—при движеніи внизъ. Работа силы q равна qh; q:Q=AC:CB= =A′A:BB′ = H:h (Основанія здѣсь тѣ же, что и въ предыдущемъ случаѣ: △A′AC∞△B′BC и △A′AD∞△B′BE). Отсюда qh = QH, ч. и т. д.



Фиг. 6.

§ 11. *Блокъ 1-го рода.* На блокѣ 1-го рода уравновѣшиваются равные грузы, прикрѣпленные къ концамъ веревки: Q = q. При движеніи веревки, насколько опускается одинъ грузъ, настолько подымается другой: H = h; слѣд. QH = qh.

§ 12. *Блокъ 2-го рода.* На подвижномъ блокѣ сила q можетъ поднять грузъ Q = 2q. Но чтобы поднять грузъ Q на высоту H, грузъ q долженъ опуститься на h = 2H, т. к. веревка смотается на 2H. Слѣд. QH = qh.

Б. Гернъ (Смоленскъ).

(Продолженіе слѣдуетъ).

О НЕПРЕРЫВНОМЪ ВЫЧЕРЧИВАНІИ ФИГУРЪ.

Задача, рѣшеніе которой будетъ изложено въ этой статьѣ, заключается въ томъ, чтобы данную фигуру, представляющую собою систему линій, вычертить непрерывнымъ движеніемъ, не проходя дважды по одной и той же линіи, принадлежащей фигурѣ, и не вычерчивая непринадлежащихъ ей линій. Условимся называть *вершинами* фигуры точки, въ которыхъ линіи фигуры либо пересѣкаются, либо пресѣкаются, а также и тѣ точки, въ которыхъ вычерчиваніе начинается или оканчивается, причемъ вершину, въ которой начинается вычерчиваніе, будемъ называть *начальной*, вершину, въ которой оканчивается вычерчиваніе—*конечной*, а всѣ прочія вершины—*промежуточными*. Можетъ, понятно, случиться, чтобы конечная вершина была въ то же время и начальной. *Стороною* фигуры мы будемъ называть такой отрѣзокъ линіи, входящей въ составъ фигуры, на которомъ расположены только двѣ вершины, ограничивающія этотъ отрѣзокъ. Каждая сторона фигуры будетъ называться *лучемъ* въ отношеніи вершины, изъ которой она исходитъ. Вершина, изъ которой исходитъ четное число лучей, будетъ называться *четной*, всѣ прочія вершины будутъ *нечетны*. Такъ какъ каждая сторона фигуры служитъ лучемъ двухъ соединяемыхъ ею вершинъ, то число *всѣхъ* лучей фигуры вдвое больше числа сторонъ, т. е. каждая фигура неизбѣжно заключаетъ въ себѣ четное число лучей.

Пусть F будетъ какая либо фигура, вычерченная въ условіяхъ разсматриваемой задачи; A—начальная, B—конечная и C—какая либо промежуточная вершина фигуры. Легко видѣть, что всякое прохожденіе черезъ промежуточную вершину C сопровождается вычерчиваніемъ двухъ ея лучей: того, по которому приходимъ въ C, и того, по которому выходимъ изъ C. Если при вычерчиваніи фигуры проходили черезъ C всего n разъ, то вершина C содержитъ $2n$ лучей. Изъ этихъ разсужденій явствуетъ, что каждая промежуточная вершина фигуры F, вычерченной въ условіяхъ разсматриваемой задачи, содержитъ четное число лучей. Что же касается вершинъ A и B, то слѣдуетъ различать два случая: 1) когда A совпадаетъ съ B, т. е. когда начальная вершина служитъ и конечной, то вычерчиваемъ одинъ лучъ вершины A, исходя изъ A, одинъ лучъ, возвращаясь окончательно въ A, и четное число лучей, проходя одинъ или нѣсколько разъ черезъ A (если только изъ A исходитъ больше двухъ лучей). Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ вершина A (а слѣдовательно и всѣ вершины фигуры) есть четная вершина. 2) Когда A не совпадаетъ съ B, то вычерчиваемъ одинъ лучъ вершины A, исходя изъ A, и четное число лучей, проходя черезъ A, т. е. вершина A нечетна. Вершина B также нечетна, ибо четное число лучей вершины B вычерчивается при прохожденіяхъ черезъ B и одинъ ея лучъ вычерчивается, когда окончательно возвращаемся въ B. Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ фигура F заключаетъ двѣ нечетныя вершины A и B. Изъ сказаннаго выводимъ слѣдующее необходимое условіе возможности вычерчиванія фигуры съ соблюденіемъ требованій разсматриваемой задачи.

I. *Для того, чтобы данную фигуру* F *возможно было вычертить съ соблюденіемъ изложенныхъ требованій, необходимо, чтобы фигура* F *заключала либо только четныя, либо двѣ и только двѣ нечетныя вершины. Въ первомъ случаѣ вычерчиваніе фигуры* F *необходимо будетъ начинаться и оканчиваться въ одной и той же вершинѣ, во второмъ случаѣ вычерчиваніе необходимо начинается въ одной изъ двухъ нечетныхъ вершинъ и оканчивается въ другой.*

Такъ напр. изображенная на черт. 7 фигура, заключая четыре нечетныя вершины A, B, C и D, не можетъ быть вычерчена въ условіяхъ задачи.

Фиг. 7.

Легко видѣть, что если вычерчиваніе фигуры F съ четными вершинами возможно*), когда начинаемъ и оканчиваемъ вычерчиваніе въ вершинѣ A, то оно будетъ возможно и тогда, когда начнемъ его и въ любой изъ остальныхъ вершинъ, т. е. безразлично, въ какой изъ вершинъ начинается вычерчиваніе. Дѣйствительно, если вершины, черезъ которыя послѣдовательно проходили, отмѣтимъ буквами A, B, C,... K,... P,... Z, A (причемъ, конечно, можетъ случиться, что какая либо вершина P тождественна съ какими либо изъ предшествующихъ вершинъ, напр. съ K), то легко замѣтить, что если начнемъ вычерчиваніе съ одной изъ промежуточныхъ вершинъ, напр. съ K, и пройдемъ путь K,... P,... Z, A, B, C,... K, то вся фигура будетъ вычерчена. Не трудно также усмотрѣть, что если фигура имѣетъ двѣ нечетныя вершины A и B, то безразлично, какую изъ нихъ примемъ за начальную, ибо если фигуру возможно вычертить, начавъ въ A и окончивъ (необходимо) въ B, то ее возможно также вычертить, начавъ въ B, и, пройдя тотъ же путь въ обратномъ направленіи, окончить въ A.

Фигуру F мы будемъ называть *цѣльной,* если она содержитъ хоть одну вершину A, обладающую тѣмъ свойствомъ, что, исходя изъ A и двигаясь по сторонамъ фигуры, мы можемъ придти въ любую вершину фигуры F. Очевидно, что если хоть одна вершина A фигуры обладаетъ такимъ свойствомъ, то и всякая другая вершина M той же фигуры обладаетъ тѣмъ же свойствомъ, ибо можемъ, исходя изъ M, прійти въ любую вершину фигуры, пройдя путь отъ M до A и отъ A до желаемой вершины. Нецѣльная фигура, подобная напр., изображенной на рис. 8, очевидно, не можетъ быть вычерчена съ соблюденіемъ требованій задачи, ибо, если, исходя изъ A и двигаясь по сторонамъ фигуры, нельзя прійти напр. въ B, то всякій разъ, когда вычертимъ одну изъ этихъ двухъ вершинъ, нельзя будетъ вычертить другой. Отсюда слѣдуетъ условіе:

Фиг. 8.

II. *Для того, чтобы фигуру* F *возможно было вычертить въ условіяхъ задачи, необходимо, чтобы* F *была цѣльной фигурой.*

---

*) Говоря „вычерчиваніе фигуры возможно“, мы будемъ подразумѣвать вычерчиваніе съ соблюденіемъ условій задачи.

Прежде чѣмъ покажемъ достаточность условій I и II для возможности вычерчиванія фигуры F, докажемъ слѣдующую лемму:

Лемма: *Фигура съ нечетнымъ числомъ нечетныхъ вершинъ невозможна.*

Дѣйствительно, если F есть фигура съ нечетнымъ числомъ нечетныхъ вершинъ, то число S всѣхъ лучей, принадлежащихъ нечетнымъ вершинамъ, есть число нечетное, ибо S есть сумма нечетнаго числа нечетныхъ чиселъ. Число s всѣхъ лучей, принадлежащихъ четнымъ вершинамъ фигуры F, есть число четное, ибо s есть сумма четныхъ чиселъ. Такимъ образомъ число $S+s$ всѣхъ лучей фигуры есть число нечетное, что, какъ мы выше видѣли, невозможно.

Обозначивъ теперь черезъ F_{n+1} фигуру, содержащую $n+1$ сторонъ и удовлетворяющую условіямъ I и II, докажемъ, что эти условія достаточны для возможности вычерчиванія фигуры F_{n+1}, если только они достаточны для возможности вычерчиванія всякой фигуры, содержащей не больше чѣмъ n сторонъ. Такъ какъ фигура объ одной сторонѣ необходимо удовлетворяетъ условіямъ I и II и можетъ быть вычерчена непрерывнымъ движеніемъ, то этимъ докажемъ, что условія I и II вообще достаточны.

Пусть A будетъ какая либо изъ вершинъ фигуры F_{n+1} въ томъ случаѣ, когда послѣдняя содержитъ только четныя вершины, и будемъ разумѣть подъ A одну изъ нечетныхъ вершинъ фигуры въ томъ случаѣ, когда фигура содержитъ двѣ нечетныя вершины. Исходя изъ A, вычертимъ сторону AB фигуры; тогда останется вычертить фигуру F_n объ n сторонахъ. Легко усмотрѣть, что F_n либо будетъ цѣльная фигура, либо будетъ состоять изъ двухъ цѣльныхъ фигуръ f и φ. Въ самомъ дѣлѣ, предполагая, что F_n не цѣльная фигура, разсмотримъ двѣ группы ея вершинъ. Къ первой группѣ отнесемъ точку A и всѣ тѣ вершины, въ которыя можно прійти, исходя изъ A и слѣдуя по сторонамъ фигуры F_n. Этими вершинами очевидно опредѣляется нѣкоторя цѣльная фигура f. Во вторую группу войдутъ всѣ тѣ вершины, въ которыя нельзя прійти, исходя изъ A и двигаясь по сторонамъ фигуры. Пусть M и N будутъ двѣ вершины второй группы. Такъ какъ F_{n+1} фигура цѣльная, то можно прійти изъ A какъ въ M, такъ и въ N, двигаясь по сторонамъ фигуры F_{n+1}, а такъ какъ нельзя прійти изъ A ни въ M, ни въ N, двигаясь по сторонамъ фигуры F_n, которая отличается отъ F_{n+1} только отсутствіемъ стороны AB, то ясно, что кратчайшіе пути изъ A до M и N въ фигурѣ F_{n+1} могутъ быть изображены черезъ ABM и ABN, причемъ пути BM и BN образуются сторонами, соединяющими вершины второй группы. Поэтому возможно перейти изъ M въ N, двигаясь по пути MBN, образуемомъ сторонами, соединяющими вершины второй группы. Такъ какъ M и N двѣ произвольныя точки второй группы, то это означаетъ, что линіи, соединяющія вторую группу вершинъ, образуютъ цѣльную фигуру φ, что и требовалось доказать.

Разсмотримъ теперь нѣсколько случаевъ. Когда фигура F_{n+1} содержитъ только четныя вершины, то фигура F_n, содержа двѣ нечет-

ныя вершины A и B, удовлетворяетъ условію I. Она удовлетворяетъ также и условію II, ибо въ противномъ случаѣ она состояла бы изъ двухъ цѣльныхъ фигуръ f и φ, изъ коихъ каждая соотвѣтственно содержала бы по одной нечетной вершинѣ A и B, что невозможно по предыдущей леммѣ. Но если фигура F_n удовлетворяетъ условіямъ I и II, она, по допущенію, можетъ быть вычерчена, причемъ вычерчиваніе можетъ быть начинаемо съ вершины B.

Когда фигура F_{n+1} содержитъ двѣ нечетныя вершины и B есть вторая нечетная вершина, тогда фигура F_n, содержа однѣ только четныя вершины, удовлетворяетъ условію I. Если она удовлетворяетъ и условію II, то ее возможно вычертить, начиная съ B; если же она условію II не удовлетворяетъ, то она состоитъ изъ двухъ фигуръ f и φ, изъ коихъ каждая, удовлетворяя условіямъ I и II и содержа меньше, чѣмъ n сторонъ, можетъ быть въ отдѣльности вычерчена въ условіяхъ разсматриваемой нами задачи. Въ этомъ случаѣ нельзя вычертить фигуры F_{n+1}, исходя изъ A и переходя въ B, но эту фигуру можно вычертить такъ: исходя изъ A, вычертимъ фигуру f; конечною вершиною будетъ служить вершина A. Перейдя затѣмъ по сторонѣ AB въ B, вычертимъ фигуру φ.

Когда фигура F_{n+1} содержитъ двѣ нечетныя вершины и второю нечетною вершиною служитъ не B, а C, то фигура F_n, содержа только двѣ нечетныя вершины B и C, можетъ быть вычерчена, если только она удовлетворяетъ условію II. Въ противномъ случаѣ она состоитъ изъ двухъ цѣльныхъ фигуръ f и φ, и невозможно, чтобы изъ двухъ нечетныхъ вершинъ B и C одна принадлежала f, а другая φ, ибо тогда, вопреки вышедоказанной леммѣ, эти фигуры имѣли бы по одной только нечетной вершинѣ. Пусть же f содержитъ только четныя, а φ обѣ нечетныя вершины B и C. Вычерчиваніе фигуры F_{n+1} можетъ быть произведено слѣдующимъ образомъ: начавъ съ A, вычертимъ фигуру f, удовлетворяющую условіямъ I и II и содержащую не больше, чѣмъ n сторонъ. Окончивъ вычерчиваніе фигуры f въ A, перейдемъ по AB въ B и вычертимъ фигуру φ, содержащую не больше, чѣмъ n сторонъ и удовлетворяющую условіямъ I и II, причемъ вычерчиваніе φ начнемъ съ нечетной вершины B и окончимъ въ нечетной вершинѣ C.

Такимъ образомъ доказана достаточность условій I и II. Изъ хода доказательства явствуетъ, что когда эти условія удовлетворены, то для вычерчиванія фигуры надо начать съ любой вершины въ фигурѣ съ четными вершинами и съ одной изъ нечетныхъ вершинъ въ фигурѣ, содержащей двѣ нечетныхъ вершины. Засимъ необходимо и всегда возможно двигаться по сторонамъ фигуры такъ, чтобы сохранять цѣльность не вычерченной части.

Ш. С. (Одесса).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Новая система химическихъ элементовъ.—*Lecoq de Boisbaudran* (C. R. CXX, 1097).—Всякому, хотя бы поверхностно знакомому съ химіей, хорошо извѣстно, что существуютъ естественныя группы элементовъ, столь сходныхъ между собою по своимъ химическимъ и отчасти физическимъ свойствамъ, что сходство это невольно бросается въ глаза при первомъ знакомствѣ съ такими элементами. Таковы напр. группа галоидовъ (іодъ, бромъ, хлоръ, фторъ), группа кислорода (теллуръ, селенъ, сѣра, кислородъ), группа азота (сурьма, мышьякъ, фосфоръ, азотъ) и др. Въ каждой изъ такихъ группъ можно подмѣтить элементъ, въ которомъ особенно рѣзко выражены всѣ отличительныя свойства группы и который служитъ какъ бы типичнымъ ея представителемъ. Хлоръ въ группѣ галоидовъ, сѣра въ группѣ кислорода, фосфоръ въ группѣ азота, кремній въ группѣ углерода служатъ такими представителями или „узлами“ (noeuds), какъ называетъ ихъ Lecoq de Boisbaudran. Если расположимъ представителей главнѣйшихъ группъ въ горизонтальный рядъ по величинѣ ихъ атомнаго вѣса, а члены каждой группы размѣстимъ въ одномъ вертикальномъ столбцѣ съ ея представителемъ, руководствуясь также величиною ихъ атомнаго вѣса, то получимъ слѣдующую табличку, въ которой „узлы“ отпечатаны жирнымъ шрифтомъ:

					(?η)″	Bi′	Pb″	Tl′
						208	206	204
						88	88	91
	Ba″	Cs′	(?ζ)″	I′	Te″	Sb′	Sn″	In′
	137	133	132,7	127	125	120	118	113
	50	48	48,7	47	46	45	46	43
	Sr″	Rb′	(?ε)″	Br′	Se″	As′	Ge″	Ga′
	87	85	84	80	79	75	72	70
	47	46	47,6	44,5	47	44	44	43
Узлы	**Ca″**	**K′**	(?δ)″	**Cl′**	**S″**	**P′**	**Si″**	**Al′**
(*Noeuds*)	40	39	36,4	35,5	32	31	28	27
	16	16	16,3	16,5	16	17	16	16
	Mg″	Na′	(?γ)″	Fl′	O″	N′	C″	B′
	24	23	20,1	19	16	14	12	11
	15	16	16,2	16,1				
	Be″	Li′	(?β)″	(?α)′				
	9	7	3,9	2,9				
	H	H	H	H	H	H	H	H

Таблица эта содержитъ пока лишь 8 главныхъ семействъ элементовъ. Болѣе подробное изложеніе своей системы авторъ обѣщаетъ дать впослѣдствіи.

При разсматриваніи этой таблицы легко подмѣтить слѣдующія правильности:

1) Атомные вѣса элементовъ каждой вертикальной группы увеличиваются снизу вверхъ, причемъ во всѣхъ восьми семействахъ разность атомныхъ вѣсовъ двухъ непосредственно другъ за другомъ слѣдующихъ элементовъ весьма близка къ 16-и для элементовъ, помѣщенныхъ ниже узловъ.

2) Такая же разность для элементовъ первыхъ 4-хъ семействъ, находящихся выше узловъ, близка къ 46.

3) Разность между атомными вѣсами элементовъ первой и второй строкъ послѣднихъ четырехъ группъ равна, приблизительно 88.

4) Всѣ группы содержатъ по равному числу элементовъ. Первымъ членомъ каждой группы является водородъ.

5) Линія узловъ занимаетъ въ системѣ центральное положеніе.

6) Элементы первой, третьей, пятой и седьмой, т. е. нечетныхъ группъ, обладаютъ четной атомностью, элементы четныхъ группъ обладаютъ нечетной атомностью.

7) Металлы, т. е. электроположительные элементы располагаются въ самыхъ верхнихъ и въ самыхъ нижнихъ горизонтальныхъ рядахъ, а также въ первыхъ и послѣднихъ вертикальныхъ группахъ. Электроотрицательные металлоиды занимаютъ центральную часть системы.

Въ системѣ Lecoq de Boisbaudran'a вся третья группа состоитъ изъ неизвѣстныхъ элементовъ. Изъ нихъ γ съ атомнымъ вѣсомъ 20,1 соотвѣтствуетъ, по мнѣнію автора, аргону, а $\beta(3,9)$—гелію. Кромѣ того одинъ неизвѣстный элементъ (α) находится въ четвертой группѣ и одинъ (η) въ пятой.

Желая болѣе обосновать свою систему, авторъ высказываетъ слѣдующія предположенія о происхожденіи химическихъ элементовъ:

Предположимъ, что первоначальная масса A однородной матеріи по неизвѣстной причинѣ раздѣлилась на двѣ неравныя массы. Получатся два химическихъ элемента $A/_2 + q$ и $A/_2 - q$, изъ которыхъ одинъ будетъ электроположительнымъ по отношенію къ другому; одинъ изъ этихъ элементовъ будетъ металломъ, другой металлоидомъ, понимая термины „металлъ" и „металлоидъ" въ широкомъ смыслѣ. Дробя каждый изъ этихъ элементовъ снова на двѣ неравныя части, получимъ 4 элемента, два положительныхъ и два отрицательныхъ, и т. д. Такимъ образомъ явятся переходные элементы отъ наиболѣе положительнаго къ наиболѣе отрицательному. Если ограничимся на первое время восемью элементами, то они могли бы дать начало восьми группамъ, приведенной системы. Остальные члены каждой группы образуются подобнымъ образомъ изъ типичнаго элемента. Очевидно, что число семействъ должно быть четнымъ.

Такимъ образомъ образованіе химическихъ элементовъ зависѣло бы отъ введенія неравенствъ въ массы матеріи, подобно тому какъ силы являются результатомъ неравенствъ въ движеніяхъ тѣлъ. Въ обоихъ случаяхъ + и — компенсируются вокругъ нѣкотораго положенія равновѣсія, которое никогда не возстановляется, будучи однажды нарушено. Возможно ли допустить, что химическіе элементы, подобно живымъ силамъ, способны измѣняться, сохраняя постоянно свою сумму? Хотя такія измѣненія до сихъ поръ и не наблюдались, авторъ убѣжденъ, что они ежедневно совершаются въ природѣ подъ вліяніемъ времени и силъ, которыми мы или не можемъ, или не умѣемъ располагать.

В. Г.

Въ началѣ іюля d'Arsonval сдѣлалъ сообщеніе въ Парижской Академіи Наукъ относительно **электрическаго разряда электрическаго ската.** При помощи особыхъ приборовъ собственнаго изобрѣтенія онъ имѣлъ возможность записывать всѣ фазы разряда и измѣрять въ любой моментъ силу и электровозбудительную силу тока, производимаго скатомъ. Результаты получились слѣдующіе:

1) Токъ всегда имѣетъ одно и то же направленіе — отъ спинной поверхности тѣла къ брюшной.

2) Разрядъ прерывистъ и слагается изъ 4—12 отдѣльныхъ разрядовъ, слѣдующихъ другъ за другомъ приблизительно черезъ 0,01 сек. Кривая полнаго разряда сходна по виду съ кривой мускульнаго сокращенія; она быстро достигаетъ maximum'а въ концѣ 0,02 или 0,03 сек. и затѣмъ постепенно падаетъ черезъ 0,10 или 0,15 сек.

3) Сила тока можетъ измѣняться отъ 1 до 7 амп. у животнаго, имѣющаго 30 сант. въ діаметрѣ. Электровозбудительная сила измѣняется отъ 10 до 17 вольтъ. Обѣ эти величины зависятъ отъ воли животнаго въ той же мѣрѣ, какъ и отъ сокращенія мускуловъ.

4) Особенно наглядно можно обнаружить силу разряда, соединяя надлежащимъ образомъ оба электрическихъ органа съ лампочкой накаливанія. Подъ вліяніемъ самопроизвольнаго разряда лампочка горитъ ослѣпительно бѣлымъ свѣтомъ во все время разряда.

5) Соединяя съ каждымъ электрическимъ органомъ по лампѣ, можно замѣтить, что онѣ обѣ накаливаются одновременно до одинаковой степени—слѣд. оба органа дѣйствуютъ согласно.

6) Послѣ нѣсколькихъ сотрясеній скатъ истощается и лампочка не загорается. Если соединить лампу только съ однимъ органомъ, то только онъ истощается; по соединеніи съ неистощеннымъ органомъ лампочка загорается вновь.

7) Измѣряя температуру органа во время разряда, замѣчаютъ повышеніе на 0,2—0,3°, но только при замкнутомъ токѣ.

8) Если перерѣзать нервъ органа и возбудить его периферическій конецъ помощью индуктивнаго тока, то получимъ разрядъ болѣе слабый, и притомъ одинъ.

9) При аскультированіи органа въ время разряда слышенъ звукъ также какъ и при самопроизвольномъ сокращеніи мускула. Этотъ звукъ выше, чѣмъ для мускула, и соотвѣтствуетъ прибл. 100 колеб. въ сек.

D'Arsonval приходитъ къ заключенію, что электрическій органъ и мускулъ дѣйствуютъ одинаково и что электричество доставляется этимъ органомъ вслѣдствіе измѣненія поверхностнаго натяженія.

Marey по поводу этого сообщенія замѣтилъ, что для установленія полной параллели между электрической и механической энергіей мускула, интересно было бы изучить дѣйствіе ядовъ на дѣятельность электрическаго органа, тѣхъ именно ядовъ, дѣйствіе которыхъ на мускулъ уже извѣстно. (C. R. CXXI, 145).

К. Смоличъ (Умань).

Новый элементъ Morisot, замѣчательный своей электровозбудительной силой, устроенъ такъ:

1) Анодомъ служитъ пластинка ретортнаго угля, погруженная въ сосудъ съ деполяризирующей смѣсью. Послѣдняя состоитъ изъ одного

объема сѣрной кислоты и 3 объемовъ воды, насыщенной на холоду двухромокислымъ кали. Кристаллы этой соли, положенные въ воронку, находящуюся въ верхней части сосуда, поддерживаютъ насыщеніе раствора.

2) Первый пористый сосудъ, погруженный въ деполяриз. смѣсь, наполненъ слабымъ растворомъ ѣдкаго натра (плотность 1,05).

3) Амальгамированная цинковая пластинка, представляющая катодъ, погружается во второй пористый сосудъ, находящійся внутри перваго и наполненный концентрированнымъ растворомъ ѣдкаго натра.

Электровозбудительная сила этого элемента вначалѣ = 2,5 в.; затѣмъ въ теченіе 10 часовъ непрерывнаго дѣйствія она опускается до 2,4 в. Внутреннее сопротивленіе около 0,8 ома и измѣняется съ толщиной и строеніемъ діафрагмы. (C. R. CXXI, 251).

К. Смоличъ (Умань).

Дѣйствіе магнитизма на упругость тѣлъ, показалъ Maurain, помѣщая діапазонъ въ магнитномъ полѣ; число колебаній въ сек. при этомъ измѣнялось и притомъ различнымъ образомъ, смотря по относительному положенію діапазона и магнитнаго поля. (C. R. CXXI, 248).

К. Смоличъ (Умань).

ЗАДАЧИ.

№ 224. Три окружности O_1, O_2 и O_3, имѣющія общую точку O, пересѣкаются попарно подъ одинаковыми углами. Положимъ, что окружности O_1 и O_2 пересѣкаются еще въ точкѣ c, окружности O_2 и O_3—въ точкѣ a, O_3 и O_1—въ точкѣ b. Полагая, что точки a, b, c расположены на одной прямой и что $Oa < Ob < Oc$, доказать, что

$$\frac{1}{Oa}=\frac{1}{Ob}+\frac{1}{Oc}.$$

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 225. На плоскости даны четыре прямыя, никакія три изъ которыхъ не проходятъ черезъ одну точку.

Построить пятую прямую такъ, чтобы точки пересѣченія ея съ данными прямыми образовали на ней три послѣдовательныхъ равныхъ между собой отрѣзка. Сколько рѣшеній?

Е. Буницкій (Одесса).

№ 226. Построить треугольникъ ABC по углу B и по суммѣ $a+c$ сторонъ, прилежащихъ этому углу, если извѣстно, что уголъ между стороной a и діаметромъ круга описаннаго, проходящимъ черезъ данную внутри угла B точку N, равенъ α.

Ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.

№ 227. Рѣшить систему уравненій:

$$x^3+y^3=186-2xy(x+y),$$
$$x+y=6.$$

(Заимств.). *Д. Е.* (Иваново-Вознесенскъ).

№ 228. Показать, что сумма квадратовъ разстояній отъ центра круга, описаннаго около треугольника, до точекъ касанія круга вписаннаго равна

$$4R(R-r)-(R^2+r^2),$$

гдѣ R есть радіусъ круга описаннаго, и r—вписаннаго.

(Заимств.) *Г. Легошинъ* (с. Знаменка).

№ 229. Показать, что

$$n=E\left[\frac{1}{2.3.4...n(e-2)-\{1+n+n(n-1)+\cdots+n(n-1)...4.3\}}\right],$$

гдѣ n есть произвольное цѣлое положительное число, e—основаніе Неперовой системы логариѳмовъ, а знакъ E означаетъ цѣлое число, содержащееся въ дробномъ выраженіи, стоящемъ въ скобкахъ.

А. Варенцовъ (Шуя).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

168 (3 сер.). Показать, что

$$\frac{1}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}=2+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{cotg}^2\alpha.$$

Такъ какъ

$$\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{cotg}\alpha=1,$$

то

$$2+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{cotg}^2\alpha=(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha)^2=\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2=\frac{1}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}.$$

М. Зиминъ (Орелъ); *Т. Рощуковскій* (Хотинъ); *А. Дмитріевскій* (Цивильскъ); *П. Бѣловъ* (с. Знаменка); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л.* и *Р.*; *И. Барковскій* (Могилевъ губ.); *А. Шантырь* (Спб.); *А. П.* (Ломжа); *А. Бачинскій* (с. Любень); *П. Хлѣбниковъ* (Тула).

№ 169 (3 сер.). Черезъ вершину A треугольника ABC провести прямую AD такъ, чтобы вписанные въ треугольники ABD и ACD круги были равны.

Опустимъ изъ вершины A перпендикуляръ AP на сторону BC и обозначимъ AD черезъ x, BD черезъ y, стороны треугольника ABC черезъ a, b, c, отрѣзокъ BP черезъ m. Изъ треугольниковъ ABD и ACD получимъ:

$$x^2 = c^2 + y^2 - 2ym,$$
$$b^2 = x^2 + (a-y)^2 + 2(a-y)(y-m).$$

Опредѣливъ изъ перваго уравненія m и подставивъ найденное значеніе во второе уравненіе, легко найдемъ соотношеніе:

$$c^2(a-y) + b^2y = a[x^2 + y(a-y)]. \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Выразимъ теперь равенство радіусовъ круговъ, вписанныхъ въ треугольники ABD и ACD:

$$\frac{\text{пл. } ABD}{\text{пл. } ACD} = \frac{c+y+x}{b+a-y+x} = \frac{y}{a-y} \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Изъ уравненія (2) находимъ

$$y = \frac{a(c+x)}{2x+b+c}$$

и подставляемъ это значеніе въ уравненіе (1):

$$c^2 - x^2 = -\frac{a^2(c+x)^2}{(2x+b+c)^2} + \frac{(c+x)(a^2+c^2-b^2)}{2x+b+c}.$$

Сокративъ это уравненіе на $c+x$ и уничтоживъ знаменателя, получимъ:

$$(x-c)(2x+b+c)^2 = a^2(c+x) - (a^2+c^2-b^2)(2x+b+c),$$

или

$$(2x+b+c)[(x-c)(2x+b+c) + a^2 + c^2 - b^2] = a^2(c+x).$$

Это уравненіе преобразуемъ слѣдующимъ образомъ:

$$(2x+b+c)(2x^2 - 2cx + bx - bc + cx - b^2) + a^2(2x+b+c-c-x) = 0,$$

или

$$(2x+b+c)(2x-b-c)(b+x) + a^2(b+x) = 0.$$

Сокращая это уравненіе на $b+x$ и раскрывая скобки, получимъ:

$$4x^2 - (b+c)^2 + a^2 = 0,$$

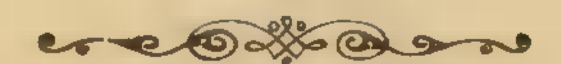
откуда

$$x^2 = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4} = p(p-c),$$

гдѣ p есть полупериметръ треугольника ABC, т. е. *прямая, выходящая изъ вершины* A *треугольника и разбивающая его на два треугольника, имѣющихъ равные вписанные круги, есть средняя пропорціональная между полупериметромъ треугольника и полупериметромъ безъ стороны, противолежащей вершинѣ* A.

Построеніе такой прямой не представляетъ затрудненій.

L. (Тамбовъ).



Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса, 2-го Сентября 1895 г.

„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 29.

разсматриваетъ нѣкоторыя и высказываетъ свои взгляды относительно порядка и способа образованія нѣкоторыхъ лунныхъ горъ. Приложены двѣ фотографіи, изображающія мѣстности близъ центральнаго меридіана.

Eléctions générales du 3 Avril 1895.

Nouvelles de la Science. Variétés.

Observations astr. à faire en Mai.

К. Смоличъ (Умань).

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ

НОВѢЙШИХЪ ФРАНЦУЗСКИХЪ ИЗДАНІЙ.

Физика, астрономія, физ. географія, метеорологія.

Caronnet, T, Recherches sur les surfaces isothermiques et les surfaces dont les rayons de courbure sont fonctions l'un de l'autre (thèse). In- 4⁰, 73 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Dyrion, L. Sources et Goules du Néocomient. Mécanisme de la fontaine de Vaucluse et Moyen d'en régulariser le débit; Applications. Grand in- 8⁰, 63 p. avec 14 tableaux et 17 pl. Avignon.

Gourraud, G. Du magnétisme, discours prononcé dans le séance du 4 décembre 1893, à la salle des beaux-arts de Nantes. In- 8⁰, 16 p. Nantes.

Gridon, E. Cours complet de physique à l'usage de l'enseignement secondaire. Ouvrage orné de 447 grav. et d'une planche en coul. 3-e édition. In- 16⁰, 745 p. Paris.

Lambert, A. A. Etude sur la transmission de la chaleur. In- 8⁰, 73 p. avec figures. Lille.

Poiré, P. Physique. 5-e édition, complètement refondue. In- 8⁰, 878 p. avec fig. Paris, Delagrave.

Bontemps, A. De l'évaporation par ruissellement, système A. Bontemps. In- 8⁰, 31 p. avec fig. et planche. Compiègne.

Guilhon, E. Théorie météorologiques et Prévision du temps. In- 8⁰, 96 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Philbert, C. M. Etude d'acoustique. Essai sur le tuyau d'orgue à anche battante. In- 8⁰, 63 p. Avranches, Durand.

Sparre, M. de. Sur le mouvement des projectiles oblongs autour de leur centre de gravité et sur les conditions de stabilité de ces projectiles. In- 8⁰, 57 p. Paris. fr. 2,50.

Bulletin météorologique du département de l'Herault. Année 1893. (21-e année). In- 4⁰, 134 p. et planches. Montpellier.

Travaux et *Memoires* du Bureau international des poids et mesures, publiés sous les auspices du comité international par le directeur du Bureau. T. 8. In- 4⁰, 84—CCCLXVI p. Paris, Gauthier-Villars et fils. fr. 15,00.

Crova, A. Conférence sur la photométrie, faite le 17 mai 1894, au congrès de la Société technique de l'industrie du gaz en France tenu à Nîmes. In- 8⁰, 23 p. Montpellier.

Destruel, J. Notice abrégée sur les mesures électriques élémentaires appliquées en télégraphie et obtenues uniquement avec le pont de Wheatstone et la boussole astatique. In- 16⁰, 32 p. avec fig. Bourg-Saint-Andéol. fr. 1,50.

Plumandon, J. R. La Marche des orages. In- 8⁰, 7 p. et 3 planches. Clermon-Ferrand.

Poincaré, H. Les oscillations électriques. Leçons professées pendant le 1-er trimestre 1892—1893. Rédigées par M. Ch. Maurain. In- 8⁰, 347 p. avec fig. Paris, G. Carré.

Rayet, G. Les Grands Hivers du pays bordelais. In- 8⁰, 42 p. Bordeaux.

Résumé des observations de l'année 1893 de la commission météorologique du Puy-de-Dôme. In- 8⁰, 101 p. et pl. Clermont-Ferrand.

Aignan A., et *P. Chabot*. Notes sur quelques expériences de physique. In- 8°, 49 p. Mont-de-Marsan.

Annales du Bureau central météorologique de France, publiées par E. Mascart, directeur du Bureau central météorologique. Année 1892. 3 vol. In- 4°. I, Mémoires. XI—286 p. et 27 pl.; II, Observations, 407 p.; III, Pluies en France, observations publiées avec la coopération du ministère des travaux publics, 312 p. et 5 pl. Paris, Gauthier-Villars et fils. fr. 15,00.

Fortier, E. Un cyclone dans les Antilles. L'Ouragan de 1891 à la Martinique. In- 8°, VIII—101 p. Paris, Rousseau.

Plumandon. Météorologie générale de l'année 1892. (Observatoire du Puy-de-Dôme). In- 8°, 45 p. Clermon-Ferrand.

Vintéjoux, F. Etude sur le boisement de nos montagnes, considéré au point de vue de l'amélioration du climat et du régime des eaux. In- 8°, 43 p. Tulle.

КАТАЛОГЪ ИЗДАНІЙ
РЕДАКЦІИ
„ВѢСТНИКА ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ".

№ кат.		Цѣна съ перес. руб.	коп.
0.	Электрическіе аккумуляторы *Э. К. Шпачинскаго*	— руб.	55 коп.
9.	О землетрясеніяхъ *Э. К. Шпачинскаго*	— „	50 „
16.	О формулѣ P=MG. Пр. *О. Хвольсона*	— „	20 „
17.	Объ обратныхъ изображеніяхъ на сѣтчатой оболочкѣ глаза *О. Страуса*	— „	5 „
18.	Элементарная теорія гироскоповъ. Пр. *Н. Жуковскаго*	— „	20 „
24.	Абсолютная скала температуръ. Пр. *Н. Шиллера*	— „	25 „
31.	Ариѳметическія начала гармонизаціи. *В. Фабриціуса*	— „	5 „
34.	О гальванопластикѣ. *Н. Успенскаго*	— „	10 „
36.	Среднія величины: ариѳметическая, геометрическая и гармоническая. *І. Клейбера*	— „	25 „
37.	Именованныя величины въ школьномъ преподаваніи. *Ѳ. Мацона*	— „	85 „
39.	О газообразномъ и жидкомъ состояніи тѣлъ. Князя *Б. Голицына*	1 „	10 „
40.	Взаимныя точки треугольника. *А. Грузинцева*	— „	20 „
41.	Нѣсколько опытовъ изъ гидростатики и гидродинамики. Пр. *Н. Слугинова*	— „	5 „
42.	Замѣтка о центробѣжной силѣ. Пр. *Н. Шиллера*	— „	15 „
43.	Объ отношеніи окружности къ діаметру. *М. Попруженко*	— „	10 „
44.	Проективные ряды съ общимъ основаніемъ. *Д. Ефремова*	— „	10 „
47.	Практическое руководство къ изготовленію электрическихъ приборовъ (для любителей) *Р. Боттона*. Переводъ *П. Прокшина*. Изданіе 2-е	1 „	10 „
49.	Внутренняя точка геометрической фигуры. *І. Клейбера*	— „	10 „
50.	Краткій историческій очеркъ развитія ученія объ электричествѣ. *О. Пергамента*	— „	70 „
51.	Общее рѣшеніе въ цѣлыхъ числахъ неопредѣленныхъ уравненій 1-й степени. *Д. Ефремова*	— „	10 „
52.	Роль машины Атвуда въ воображаемомъ доказательствѣ 2-го закона Ньютона. Проф. *Н. Шиллера*	— „	5 „
53.	О начальномъ проподаваніи алгебры. Пр. *В. Ермакова*	— „	5 „
54.	Наибольшія и наименьшія значенія квадратной дроби. *Н Флорова*	— „	5 „
55.	О суммѣ цыфръ при различныхъ системахъ счисленія. *Н. Сорокина*	— „	5 „
58.	Таблицы 4-значныхъ логариѳмовъ и антилогариѳмовъ на двухъ складныхъ картонныхъ страницахъ	— „	32 „
59.	О разложеніи многочленовъ на множителей. *М. Попруженко*	— „	25 „
60.	Новый способъ извлеченія корней. *І. Клейбера*	— „	12 „
62.	О длинѣ. *М. Попруженко*	— „	20 „
63.	Къ 100-лѣтней годовщинѣ рожденія М. Фарадея. *О. Пергамента*	— „	20 „
64.	Hermann von Helmholtz. Пр. *Г. Де-Метца*	— „	20 „
65.	Объ одномъ лекціонномъ электрометрѣ. Пр. *Ѳ. Шведова*	— „	5 „
66.	О наибольшихъ произведеніяхъ и наименьшихъ суммахъ. *П. Флорова*	— „	12 „
68.	Одно изъ метрическихъ свойствъ треугольника. *М. Попруженко*	— „	10 „

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

MATHESIS.

1895. — № 5.

Sur un groupe de coniques inscrites ou circonscrites à un triangle. Par M. *N. Ch. Spijker.* Ур-ніе коническаго сѣченія S'_1, вписаннаго въ тр-къ ABC, въ барицентрическихъ координатахъ относительно этого тр-ка, имѣетъ видъ

$$\sqrt{\frac{\alpha}{p}}+\sqrt{\frac{\beta}{q}}+\sqrt{\frac{\gamma}{r}}=0;$$

если A_1, B_1, C_1 суть точки касанія этой кривой съ сторонами тр-ка, то p, q, r суть координаты точки пересѣченія V_1 прямыхъ AA_1, BB_1, CC_1. Координаты центра O_1 кривой S'_1 пропорціональны количествамъ

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{r},\ \frac{1}{r}+\frac{1}{p},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}.$$

Ур-ніе коническаго сѣченія S'_2, касающаго сторонъ того же тр-ка въ точкахъ A_2, B_2, C_2 изотомичныхъ съ A_1, B_1, C_1, есть

$$\sqrt{p\alpha}+\sqrt{q\beta}+\sqrt{r\gamma}=0;$$

$\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$ — суть координаты точки пересѣченія V_2 прямыхъ AA_2, BB_2 CC_2; координаты центра O_2 этой кривой пропорціональны $q+r$, $r+p$, $p+q$.

Обозначимъ черезъ S_1 и S_2 коническія сѣченія, описанныя около тр-ка ABC и имѣющія центрами O_1 и O_2. Касательныя въ A, B, C къ этимъ кривымъ образуютъ тр-ки $A_3B_3C_3$ и $A_4B_4C_4$. Тр-ки $A_2B_2C_2$ и $A_4B_4C_4$ соотвѣтственно гомотетичны съ треуг-ми $A_3B_3C_3$ и $A_1B_1C_1$. Прямыя AA_3, BB_3, CC_3 пересѣкаются въ O_2; прямыя AA_4, BB_4, CC_4 пересѣкаются въ O_1. Координаты точки O_1 однѣ и тѣ же относительно каждаго изъ тр-въ ABC, $A_1B_1C_1$, $A_3B_3C_3$; координаты O_2 однѣ и тѣ же относительно тр-въ ABC, $B_2B_2C_2$, $A_4B_4C_4$. Пять группъ точекъ: $ABCV_1V_2O_1O_2$, $A_1B_1C_1V_1O_1$, $A_2B_2C_2V_2O_2$, $A_3B_3C_3O_1O_2$ и $A_4B_4C_4O_1O_2$ лежатъ соотвѣтственно на коническихъ сѣченіяхъ Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 и Δ_4, барицентрическія ур-нія которыхъ остаются безъ перемѣны относительно каждаго изъ тр-въ: ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, $A_4B_4C_4$; ур-нія эти суть:

$$\Delta,\qquad \Sigma\left(\frac{q}{r}-\frac{r}{q}\right)\beta\gamma=0,$$

$$\Delta_1,\qquad \Sigma\left(\frac{q}{r}-\frac{r}{q}\right)\beta\gamma+(\alpha+\beta+\gamma)\Sigma\frac{q-r}{p}\alpha=0,$$

$$\Delta_2,\qquad \Sigma\left(\frac{q}{r}-\frac{r}{q}\right)\beta\gamma+(\alpha+\beta+\gamma)\Sigma\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)\frac{\alpha}{p}=0,$$

$$\Delta_3,\qquad \Sigma\left(\frac{q}{r}-\frac{r}{q}\right)\beta\gamma+\frac{(q+r)(r+p)(p+q)}{2pqr}(\alpha+\beta+\gamma)\Sigma\frac{q-r}{q+r}\alpha=0,$$

$$\Delta_4,\qquad \Sigma\left(\frac{q}{r}-\frac{r}{q}\right)\beta\gamma-\frac{(q+r)(r+p)(p+q)}{2pqr}(\alpha+\beta+\gamma)\Sigma\frac{q-r}{q+r}\alpha=0.$$

Sur la sommation des puissances semblables des n premiers nombres triangulaires. Par *M. E. Barbette.* Обозначимъ черезъ T_k сумму k-хъ степеней n первыхъ треугольныхъ чиселъ; получимъ:

$$T_k=\sum_{p=1}^{p=n}\left[\frac{p(p+1)}{2}\right]^k=$$

$$=\frac{1}{2^k}\left[S_{2k}+\frac{k}{1}S_{2k-1}+\frac{k(k-1)}{1.2}S_{2k-2}+\cdots+S_k\right],$$

гдѣ S_k есть сумма k-хъ степеней n первыхъ цѣлыхъ чиселъ. Символически эту формулу можно представить въ видѣ

$$T_k=\frac{S_k(S+1)^k}{2^k},$$

если условиться въ разложенiи $(S+1)^k$ писать S_i вмѣсто S^i и S_{x+y} вмѣсто $S_x \cdot S_y$. Такъ какъ S_x есть ф-цiя $(x+1)$-й степени отъ n, то T_k, какъ и S_{2k}, есть ф-цiя степени $(2k+1)$-й относительно n.

Извѣстно, что S_k можетъ быть выражено только черезъ S_1 и S_2; слѣдов. и T_k представляется ф-цiей только отъ S_1 и S_2.

Статья заканчивается слѣдующимъ доказательствомъ, что равенство вида $T_k^x = T_r^y$ возможно только какъ тождество. Такъ какъ T_k есть ф-цiя $(2k+1)$-й степени относительно n съ коэффицiентомъ $\frac{1}{(2k+1)2^k}$ при первомъ членѣ, то T_k^x есть ф-цiя $(2k+1)x$-й степ. относительно n, съ коэффицiентомъ $\frac{1}{(2k+1)^x 2^{kx}}$ при первомъ членѣ. Точно такъ же, T_r^y есть ф-цiя $(2k+1)y$-й степ. относительно n съ коэффицiентомъ $\frac{1}{(2r+1)^y 2^{ry}}$ при первомъ членѣ; поэтому изъ равенства $T_k^x = T_r^y$ слѣдуетъ, что

$$(2k+1)x = (2r+1)y$$

и

$$(2k+1)^x 2^{kx} = (2r+1)^y 2^{ry};$$

отсюда $x = y$ и $k = r$.

Bibliographie. Tratado de esteréometria genética. Par *V. Balbin*. 1894.

Trigonométrie. Par *L. Gérard*. Paris. Prix: 1,25 fr.

Questions d'Algébre. Par *M. Maupin*. Paris. Prix: 5 fr.

Traité de perspective linéaire. Par *N. Breithof*. 1893. Paris.

Guide pratique du dessinateur. Par *N. Breithof*. 1894. Paris. Prix: 10 fr.

Sur la transformation continue. Par M. *E. Liénard*. Между сторонами и углами тр-ка, какъ извѣстно, существуютъ соотношенiя:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \\ A + B + C = \pi \end{array}\right\} \qquad (I).$$

Обозначимъ положительныя направленiя сторонъ тр-ка черезъ α, β, γ, и условимся обозначать черезъ (α, β) уголъ, на который нужно повернуть около C сторону BC, чтобы положительное направленiе ея совпало съ положительнымъ направленiемъ стороны CA; принимая для всѣхъ угловъ вращенiе въ одну сторону, получимъ соотношенiя:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{a'}{\sin A'} = \frac{b'}{\sin B'} = \frac{c'}{\sin C'} \\ A' + B' + C' = (2k+1)\pi \end{array}\right\} \qquad (II)$$

гдѣ

$$BC = a',\ CA = b',\ AB = c',\ \pi + (\beta,\gamma) = A',\ \pi + (\gamma,\alpha) = B',\ \pi + (\alpha,\beta) = C'.$$

Если соотношенiя (I) приводятъ къ равенству

$$f(a, b, c, A, B, C) = 0,$$

то соотношенiя (II) приводятъ къ новому равенству того же вида:

$$f(a', b', c', A', B', C') = 0.$$

Авторъ поясняетъ этотъ принципъ нѣсколькими примѣрами.

Notes mathématiques. 7. *Démonstraiion de l'inegalité* $x - \sin x < {}^1/_4\, x^3$. На окружности радiуса $= 1$ возьмемъ дугу $AM = x\left(<\frac{\pi}{2}\right)$ и проведемъ $MP = \sin x$; въ точ-